Uitwerking Tentamen Kansrekening 18-06-01

I

a. De gebeurtenis $A \cap B$={Eerste bal is rood én de laatste bal is wit}. M.a.w.,

$$A \cap B = \{(RX_2W)\} = (RRW) \cup (RWW).$$

Hieruit volgt dat

$$P(A \cap B) = P(RRW) + P(RWW) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 15}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{10 \cdot 15 \cdot 14}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{1}{4}.$$

b. Analoog aan de vorig opgave hebben wij hier,

$$A \cup B = \{(RX_2X_3)\} \cup \{(X_1X_2W)\}.$$

Merk op dat $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Wij moeten dus $P(A), P(B)$ bepalen. De kans $P(A) = 10/25 = 2/5$. $B = RRW \cup RWW \cup WWW \cup WRW$. De kans

$$P(B) = P(RRW \cup RWW \cup WWW \cup WRW) = P(RRW) + P(RWW) + P(WWW) + P(WRW)$$

$$= \frac{10 \cdot 15 \cdot 14}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{15 \cdot 10 \cdot 14}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 15}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{3}{5}$$

Hiermee is ook $P(A \cup B) = 2/5 + 3/5 - 1/4 = 3/4$ bepaald.

c. De kansen

$$P(RWRBB) = \frac{10 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 19}{45 \cdots 41},$$

en

$$P(BWBRR) = \frac{20 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 10 \cdot 9}{45 \cdots 41}.$$

zijn duidelijk gelijk. Hier zien wij ook dat de volgorde van de kleur geen invloed heeft op de kans.

d. Bekijk eerst het speciale geval. Laat de gebeurtenis

$$I = (WWBBB).$$

Dan, $P(I) = \frac{15}{45}\frac{14}{44}\frac{20}{43}\frac{19}{42}\frac{18}{41}$. In het vorige onderdeel is gebleken dat ieder combinatie van 2 witte en 3 blauwe ballen dezelfde kans heeft als I. Verder weten wij dat er precies 5 boven 2 zulke combinaties zijn. M.a.w.

$$P(2 \text{ witte en } 3 \text{ blauwe}) = \binom{5}{2} P(I) = \frac{10 \cdot 10 \cdot 19}{11 \cdot 43 \cdot 41}.$$

Alternatief: De kans is de hypergeometrische $\frac{\binom{15}{2}\binom{10}{0}\binom{20}{3}}{\binom{45}{5}} = \frac{\binom{15}{2}\binom{20}{3}}{\binom{45}{5}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 19}{11 \cdot 43 \cdot 41}$.

II

1. $g_X(s) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$, $E(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$, of $E(X) = g'_X(1) = \lambda$. $E(X^2 - X) = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2$, $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$, $\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$.

.

2. $P(X=n)=\sum_{k+\ell=n} P(X_1=k,X_2=\ell)=\sum_{k+\ell=n} P(X_1=k)P(X_2=\ell)=e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\sum_{k+\ell=n}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^\ell}{\ell!}$ $=e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$ zodat $X\in\pi(\lambda_1+\lambda_2)$. Alternatief $g_X(s)=g_{X_1}(s)g_{X_2}(s)=e^{\lambda_1(s-1)}e^{\lambda_2(s-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$, de genererende functie van $\pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

3. $P(X_1=k\mid X=n)=P(X_1=k,X_2=n-k\mid X=n)=e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}/e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ met $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ en $q=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

4. i. $p_{k,\ell}=P(X_1=k,X_2=\ell)=P(X_1=k,X_2=\ell\mid X=k+\ell)P(X=k+\ell)=$ $P(X_1=k\mid X=k+\ell)P(X=k+\ell)=\binom{k+\ell}{k}p^kq^\ell e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!}$.

$P(X_1=k)=\sum_{\ell=0}^{\infty}P(X_1=k,X_2=\ell)=e^{-(\lambda p)}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$ zodat $X_1\in\pi(\lambda p)$ en analoog $X_2\in\pi(\lambda q)$.

ii. Daar $P(X_1=k,X_2=\ell)=P(X_1=k)P(X_2=\ell)$ zijn X_1 en X_2 onafhankelijk.

III

De X_i zijn verdeeld met de negatief exponentiële dichtheid $Y(x)e^{-x}$.

1. $E(X_i)=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$ en $E(X_i^2)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=2$ zodat $\sigma^2(X_i)=2-1^2=1$.

2. De negatief exponentiële verdeling van de X_i is de gamma-verdeling $\gamma_{\alpha,r}$ met parameters $\alpha=1$, $r=1$. De verdeling van S_n heeft dus als dichtheid het n-voudige convolutieproduct $\gamma_{1,1}*\cdots*\gamma_{1,1}=\gamma_{n,1}$ waarbij $\gamma_{n,1}(x)=Y(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}$, daar $\Gamma(n)=(n-1)!$.

3. Als de s.v. X_i, $i\geq 1$, onafhankelijk zijn, gelijk verdeeld, met $E(X_i^2)<+\infty$, hebben we volgens de centrale limiet stelling, als $\mu=E(X_i)$, $\sigma=\sigma(X_i)$ en $S_n=X_1+\cdots+X_n$, voor alle $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}e^{-x^2/2}dx$$

Uit vraag 1 blijkt $E(X_i)=1$ en $\sigma^2(X_i)=1$. Volgens de centrale limietstelling geldt dus

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leq\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda}e^{-x^2/2}dx$$

Maar volgens de berekening in vraag 1 is voor $\lambda\geq 0$

$$P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leq\lambda)=P(S_n\leq\lambda\sqrt{n}+n)=\int_0^{\lambda\sqrt{n}+n}\frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}dx$$

wat het gewenste resultaat geeft.